Université Mohammed Premier
Faculté de Droit
ECG/Grp : A & B

Échantillonnage et Estimation

S., El Melhaoui & M., Faizi

Semestre 3, 2014/2015

Série d'exercices n°2
Variables aléatoires et lois de probabilités

Exercice 1
Une variable aléatoire X peut prendre l'une des trois valeurs 0, 1 ou 2 avec des probabilités p_0, p_1 et p_2 positives.

1. Sachant que $E(X) = 1$ et $V(X) = \frac{1}{2}$ calculer p_0, p_1 et p_2.

Exercice 2
La demande journalière X d'un bien fabriqué par une entreprise est une v.a qui suit la loi suivante : $P(X = 0) = \dfrac{1}{6}$, $P(X = 1) = \dfrac{1}{6}$, $P(X = 2) = \dfrac{1}{2}$, $P(X = 3) = \dfrac{1}{6}$.
On suppose que le profit fonction de la demande et du coût, vérifie la relation $\Pi(X) = p.X - C$,
p étant le prix unitaire du bien fixé à 600 DH, C étant le coût supposé indépendant de la demande et égal à 800 DH.

1. Calculez l'espérance et l'écart-type du profit. Quelle est la signification de l'espérance du profit ?
2. Déterminez la fonction de répartition du profit.

Exercice 3
Une compagnie d'assurance admet pour l'année à venir et pour un certain type de contrat, que 60% des assurés n'auront pas de sinistre. Par ailleurs on suppose que le coût moyen de règlement des accidents est de 5000 DH avec une probabilité de 0.25 et de 15000 DH avec une probabilité de 0.1, de 25000 DH avec une probabilité de 0.05. Un assuré déclare au plus un sinistre de ce type dans l'année.

1. Pour espérer un bénéfice moyen de 500 dh par assuré, quel doit être le montant de la cotisation.

2. Quelle est la probabilité pour que le coût de règlement total de deux assurés pris au hasard n'excède pas le montant encaissé de leurs cotisations ?.

Exercice 4

Un conseiller financier d'une banque reçoit 6 clients par jour. A chaque visite d'un client il a 20% de chance que le client lui achète un produit financier. Soit X la variable aléatoire est égale au 'nombre de produits financiers vendu'.

1. Expliquer clairement de quelle loi s'agit-il pour X ?
2. Quelle est la probabilité qu'exactement deux produits soient vendus ?
3. Aucun produit ne soit vendu.
4. Au moins 1 produit soit vendu.

Exercice 5

On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0.3.

1. On lance 10 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois pile ?
2. On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. Combien effectuera-t-on en moyenne de lancers ?

Exercice 6

Le responsable d'une agence de location de voitures a fait un suivi sur les pannes de ses véhicules sur une période d'un an. Ceci a permis d'établir que le taux moyen de pannes a été de 2 pannes/mois.

1. En admettant que le nombre de pannes en un mois obéit à une loi de Poisson, quelle est l'expression qui permettrait de calculer la probabilité d'observer k pannes de voitures par mois.
2. Quelle est la probabilité d'observer au plus 2 pannes par mois ?
3. Quelle est la probabilité d'observer au moins 3 pannes par mois ?
4. Quelle est la probabilité d'observer 5 pannes sachant qu'on a observé au moins 3 pannes ?

Exercice 7

Compte tenu des réductions budgétaires, un hôpital souhaite changer l'organisation de certains services.

1. Le service des urgences reçoit en moyenne une personne toutes les 2 heures. On suppose que le nombre de personnes reçues suit une loi de Poisson.
   a) Déterminer le nombre moyen de patients admis par jour.
   b) Calculer la probabilité de recevoir au moins 20 personnes un jour donnée.
2. Dans 10% des cas, les patients doivent être hospitalisés. Un jour donné il y eut 30 entrées aux urgences.
   a) Soit Y le nombre de patients hospitalisés ce jour là. Quelle est la loi de Y ? Calculer le nombre moyen des patients qui ont été hospitalisé.
   b) Par quelle loi peut-on approcher la loi de Y ?
   c) Quelle est la probabilité que 10 patients au plus soient hospitalisés.
3. Au service des soins intensifs, le nombre journalier de patients suit une loi de Poisson. On estime que la probabilité qu'il n'y ait aucun patient est égale à $6,738.10^{-3}$. La direction décide de limiter à 10, le nombre de lits dans ce service. Que pensez vous de cette décision ?

Exercice 8

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante k pour que f soit une densité d'une loi de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition associée à la densité f.

Exercice 9

Soit X une v.a qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. En utilisant la table de la loi normale

1. Calculer les probabilités suivantes : $P(X \geq 1.45)$, $P(X \leq -0.75)$, $P(X \geq -0.25)$ et $P(-0.5 \leq X \leq 1.2)$.
2. Calculer les quantiles d'ordre 0.05 et 0.95.
3. On suppose maintenant que X suit la loi normale $\mathcal{N}(4,7)$.

a) Calculer $P(2.9 \leq X \leq 5.2)$.
b) Calculer le quantile d'ordre 0.95 de la v.a X.

Exercice 10
Soit X une v.a qui suit la loi chi deux à 10 ddl. En utilisant la table de la loi chi deux

1. calculer les quantiles d'ordre 0.01, 0.05, 0.10 et 0.99.
2. calculer les probabilités suivantes $P(X \leq 3.94)$ et $P(X \geq -1.15)$.

Exercice 11
Soit X une v.a qui suit la loi Student à 6 ddl. En utilisant la table de la loi Student

1. calculer les probabilités suivantes $P(X \leq 1.44)$ et $P(X \geq 2.45)$.
2. calculer z tel que la probabilité $P(|X| \leq z) = \alpha$ dans le cas où $\alpha =$ 0.90, 0.95 et 0.99.

Exercices corrigés du TD 2

Solution de l'Exercice 1

1. On a $E(X) = p_0 * 0 + p_1 * 1 + p_2 * 2 = 1$ et $V(X) = p_0 * 0^2 + p_1 * 1^2 + p_2 * 2^2 - 1^2 = 1/2$, ainsi p_1 et p_2) sont les solutions du système suivant :
$$\begin{cases} p_1 + 2p_2 & = & 1 \\ p_1 + 4p_2 & = & 3/2 \end{cases}$$
D'après la méthode de Cramer on a
$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\Delta_{p_1}}{\Delta} & = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3/2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \dfrac{1 * 4 - 2 * 3/2}{1 * 4 - 2 * 1} = \mathbf{1/2} \\ p_2 = \dfrac{\Delta_{p_1}}{\Delta} & = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \dfrac{1 * 3/2 - 1 * 1}{1 * 4 - 2 * 1} = \mathbf{1/4} \end{cases}$$

En plus on a $\sum_x p_x = 1 \Rightarrow p_0 + 1/2 + 1/4 = 1 \Rightarrow p_0 = \mathbf{1/4}$.

Solution de l'Exercice 2

1. Calculons tout d'abord l'espérance et la variance de X :
   $E(X) = 0 * 1/6 + 1 * 1/6 + 2 * 1/2 + 3 * 1/6 = 10/6$;
   $V(X) = 0^2 * 1/6 + 1^2 * 1/6 + 2^2 * 1/2 + 3^2 * 1/6 - (10/6)^2 = 32/36$.
   Calculons l'espérance du profit

   $$E(\Pi(X)) = E(p.X - C) = p * E(X) - C = 600 * E(X) - 800 = \mathbf{200} \;\; \boldsymbol{DHS}$$

   Calculons la variance du profit
   $V(\Pi(X)) = V(p.X - C) = p^2 * V(X) = 600^2 * V(X) = 600^2 * 32/36$
   l'écart type du profit est donc

   $$S_{\Pi(X)} = \sqrt{V(\Pi(X))} = \mathbf{565.68} \;\; \boldsymbol{DH}.$$

   L'entreprise espère réaliser un profit journalier moyen égale à **200 DH**.
2. La loi de $\Pi(X)$ ainsi que ces valeurs cumulées sont :

x	0	1	2	3
$\Pi(x)$	-800	-200	400	1000
p_x	$1/6$	$1/6$	$1/2$	$1/6$
$F(\Pi(x))$	$1/6$	$2/6$	$5/6$	1

   Ainsi la fonction de répartition de la variable profit est

   $$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 1000; \\ 5/6, & \text{si } 400 \leq x < 1000; \\ 2/6, & \text{si } -200 \leq x < 400; \\ 1/6, & \text{si } -800 \leq x < 200; \\ 0, & \text{si } x < -800. \end{cases}$$

Solution de l'Exercice 3

1. Le coût moyen par individu X est une variable aléatoire qui suit la loi suivante

x	0	5000	15000	25000
p_x	0.60	0.25	0.10	0.05

Ainsi l'espérance de X est $E(X) = 4000$. Afin d'espérer un bénéfice moyen de 500 DH il faut que $C - E(X) = 500$ càd $C = 500 + E(X) =$ **4500** $\boldsymbol{DH}$.

2. Le montant encaissé des cotisations de deux assurés est $2 * 4500 = 9000$ DH ; le coût de règlement total de deux assurés pris au hasard est $X_1 + X_2$ où X_1 et X_2 sont deux copies de X.
   La probabilité pour que le coût de règlement total de deux assurés n'excède pas leurs cotisations est

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \leq 9000) &= P(X_1 = 0 \text{ et } X_2 = 0) + \\ &\quad P(X_1 = 0 \text{ et } X_2 = 5000) + P(X_1 = 5000 \text{ et } X_2 = 0) \\ &= 0.6^2 + 2 * 0.6 * 0.25 = \mathbf{66\%}. \end{aligned}$$

Solution de l'Exercice 4

Soit X la variable aléatoire égale au 'nombre de produits financiers vendus'.

1. De chaque visite de client résulte deux possibilité : Achat ou Non Achat $P(Achat) = 0.20$, puisqu'on a six répétitions indépendantes de la même épreuve, alors X : le nombre d'achats suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0.20$: $X \sim \mathcal{B}(6, 0.2)$
2. La probabilité qu'exactement deux produits soient vendus est

$$P(X = 2) = C_6^2 * 0.2^2 * 0.8^4 = \mathbf{24.58\%}.$$

3. La probabilité qu'aucun produit ne soit vendu est

$$P(X = 0) = 0.8^6 = \mathbf{26.21\%}.$$

4. La probabilité qu'au moins un produit soit vendu est

$$P(\overline{X = 0}) = 1 - 0.2621 = \mathbf{73.79\%}.$$

Solution de l'Exercice 5

1. Posons X la v.a égale au nombre d'apparition du pile, $X \sim \mathcal{B}(10, 0.3)$.
   Ainsi, la probabilité d'obtenir 3 fois pile est

$$P(X = 3) = C_{10}^3 * 0.3^3 * 0.7^7 = \mathbf{26.68\%}.$$

2. Posons Y la v.a égale au nombre de lancers avant l'apparition du pile, $Y \sim \mathcal{G}(0.3)$, $E(Y) = q/p = 0.7/0.3 = 2.33$ ainsi pour avoir le pile il faut effectuer en moyenne **3.33 lancers**.

Solution de l'Exercice 6

1. Posons X la v.a égale au nombre de pannes dans un mois, $X \sim \mathcal{P}(2)$ ainsi $P(X = k) = e^{-2}\, 2^k/k!$.
2. La probabilité d'observer au plus 2 pannes par mois est
$$P(X \leq 2) = e^{-2}\,(2^0/0! + 2^1/1! + 2^2/2!) = \mathbf{67.66\%}.$$
3. La probabilité d'observer au moins 3 pannes par mois est
$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = \mathbf{32.34\%}.$$
4. La probabilité d'observer 5 pannes sachant qu'on a observé au moins 3 pannes est
$$P(X = 5|X \geq 3) = \frac{P(X = 5 \text{ et } X \geq 3)}{P(X \geq 3)} = \frac{P(X = 5)}{P(X \geq 3)} = \frac{e^{-2}\, 2^5/5!}{0.3234} = \mathbf{11.16\%}.$$

Solution de l'Exercice 7

1. Posons X la v.a égale au 'nombre de personnes reçues au service des urgences par jour'.
   a) La réception en moyenne d'une personne toutes les 2 heures implique qu'on moyenne le service reçoit $1 * 24/2 = \mathbf{12}$ personne par jour.
   b) Puisque X suit la loi de poisson de moyenne 12 alors $X \sim \mathcal{P}(12)$. Ainsi, La probabilité de recevoir au moins 20 personnes un jour donnée est
   $$P(X \geq 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P(X \leq 19) = 1 - 0.9787 = \mathbf{2.13}\%.$$
2. a) Posons Y la v.a égale au 'nombre de personnes hospitalisés dans ce jour'. On a $Y \sim \mathcal{B}(30, 0.10)$. Ainsi, Le nombre moyen des patients qui ont été hospitalisé est $E(Y) = np = 30 * 0.10 = \mathbf{3}$ **personnes**.

b) Puisque $n = 30 \geq 20$ et $p = 0.10 \leq 0.10$ on peut approximer la loi binomiale $\mathcal{B}(30, 0.10$ par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = n * p = 30 * 0.1 = 3$, ainsi $\boldsymbol{\mathcal{B}(30, 0.10) \approx \mathcal{P}(3)}$.

c) La probabilité que 10 patients au plus soient hospitalisés est

$$P(Y \leq 10) = e^{-3}(1 + 3 + \frac{3^2}{3!} + \ldots + \frac{3^{10}}{10!}) = \mathbf{99.97\%}.$$

3. Soit Z la v.a égale au 'nombre journalier de patients admis au service des soins intensifs'. On a $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$, déterminons λ

$$P(Z = 0) = e^{-\lambda}\lambda^0/0! = 6.738\ 10^{-3} \Rightarrow \lambda = -\ln(0.006738) \approx \mathbf{5}.$$

Puisque $Z \sim \mathcal{P}(5)$, le risque d'avoir un nombre d'admis au service dépassant le nombre des lits disponibles est

$$P(Z > 10) = 1 - P(Z \leq 10) = \mathbf{1.14\%}.$$

Conclusion. *Ce risque est assez grand ; en effet le problème peut se produire* $1.14 * 365 = 4.16$ *jours par année en conséquence la decision de l'administration n'est pas adéquate.*

Solution de l'Exercice 8

1. Pour que f soit une densité de probabilité il est nécessaire qu'elle vérifie $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad &\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = 1 \\
&\Rightarrow \quad 0 + \int_{0}^{1} k(1-x)dx + 0 = 1 \\
&\Rightarrow \quad k\left[(x - x^2/2\right]_0^1 = 1 \\
&\Rightarrow \quad \boldsymbol{k = 2}.
\end{aligned}$$

2. Puisque $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ alors

$$\begin{aligned}
F(x) &= \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ \int_{-\infty}^{x} 2(1-t)dt, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ 2\left[t - t^2/2\right]_0^x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ 2x - x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Solution de l'Exercice 9

1. Les probabilités ci dessous sont calculées à partir de la Table 1 :
   - $P(X \geq 1.45) = 1 - F_Z(1.45) = 1 - 0.9265 \approx \mathbf{7.35}\%$;
   - $P(X \leq -0.75) = 1 - F_Z(0.75) = 1 - 0.7734 \approx \mathbf{22.66}\%$;
   - $P(X \geq -0.25) = 1 - F_Z(-0.25) = 1 - 1 + F_Z(0.25) \approx \mathbf{59.87}\%$;
   - $$\begin{aligned} P(-0.5 \leq X \leq 1.2) &= F_Z(1.2) - F_Z(-0.5) \\ &= F_Z(1.2) + F_Z(0.5) - 1 \\ &= 0.8849 + 0.6915 - 1 \approx \mathbf{57.87}\%. \end{aligned}$$

2. Les quantiles ci dessous sont calculées à partir de la Table 2 :

$$\begin{aligned} z_{0.05} &= -1.64; \\ z_{0.95} &= 1.64. \end{aligned}$$

3. On a $X \sim \mathcal{N}(4, 7)$ alors

$$Z = \frac{X-4}{\sqrt{7}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

a)

$$\begin{aligned} P(2.9 \leq X \leq 5.2) &= P(\frac{2.9-4}{\sqrt{7}} \leq Z \leq \frac{5.2-4}{\sqrt{7}}) \\ &= F_Z(0.45) - F_Z(-0.42) \\ &= 0.6736 + 0.6628 - 1 = \mathbf{33.64}\%. \end{aligned}$$

b) Le quantile d'ordre 0.95 est le nombre $x_{0.95}$ vérifiant

$$\begin{aligned}
P(X \leq x_{0.95}) = 0.95 \quad &\Rightarrow \quad P(Z \leq \frac{x_{0.95}-4}{\sqrt{7}}) = 0.95 \\
&\Rightarrow \quad \frac{x_{0.95}-4}{\sqrt{7}} = z_{0.95} \\
&\Rightarrow \quad x_{0.95} = \sqrt{7} * z_{0.95} + 4 \\
&\Rightarrow \quad x_{0.95} \approx \sqrt{7} * 1.64 + 4 \approx \mathbf{8.34}.
\end{aligned}$$

Solution de l'Exercice 10

On a $X \sim \chi^2_{10}$, le calcul des quantiles de X est déduit de la Table 3 :

1. $x_{0.01} = \mathbf{2.56}$, $x_{0.05} = \mathbf{3.94}$, $x_{0.10} = \mathbf{4.86}$, $x_{0.99} = \mathbf{23.21}$ (remarquer que $x_{0.99} \neq -x_{0.01}$).
2. D'après la question 1 on déduit que $P(X \leq 3.94) = \mathbf{0.05}$.
   Comme une variable suivant une loi chi-deux est toujours positive alors $P(X \geq -1.15) = \mathbf{1}$.

Solution de l'Exercice 11

On a $X \sim t_6$, le calcul des quantiles (des probabilités) de X est déduit de la Table 4 :

1. On a $t_{6;0.9} = 1.4 \Rightarrow P(X \leq 1.44) = \mathbf{0.90}$.
   $P(X \geq 2.45) = 1 - P(X \leq 2.45) = F_X(2.45) = \mathbf{0.975}$.
2.

$$\begin{aligned}
P(|X| \leq z) = \alpha \quad &\Leftrightarrow \quad P(-z < X \leq z) = \alpha \\
&\Leftrightarrow \quad F_X(z) - F_X(-z) = \alpha \\
&\Leftrightarrow \quad 2F_X(z) - 1 = \alpha \\
&\Leftrightarrow \quad F_X(z) = (\alpha+1)/2 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{z} = \mathbf{x}_{(\alpha+1)/2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

α	0.90	0.95	0.99
$(\alpha+1)/2$	0.95	0.975	0.995
z	**1.94**	**2.45**	**3.71**