Série d'exercices n°2

Exercice 1 : Une Variable aléatoire X peut prendre l'une des trois valeurs 0, 1 ou 2 avec des probabilités p_0, p_1 et p_2 positives. Sachant que $E(X) = 1$ et $V(X) = \frac{1}{2}$ calculer p_0, p_1 et p_2.

Exercice 2 : La demande journalière X d'un bien fabriqué par une entreprise est une v.a qui suit la loi suivante:
$P(X = 0) = \dfrac{1}{6}$, $P(X = 1) = \dfrac{1}{6}$, $P(X = 2) = \dfrac{1}{2}$, $P(X = 3) = \dfrac{1}{6}$.
On suppose que le profit fonction de la demande et du cout, vérifie la relation $\Pi(X) = p.X - C$, p étant le prix unitaire du bien fixé à 600 DH, C étant le coût supposé indépendant de la demande et égal à 800 DH.
1) Calculez l'espérance et l'écart-type du profit. Quelle est la signification de l'espérance du profit?.
2) Déterminez la fonction de répartition du profit et tracez son graphe.

Exercice 3 : Une compagnie d'assurance admet pour l'année à venir et pour un certain type de contrat, que 60% des assurés n'auront pas de sinistre. Par ailleurs on suppose que le coût moyen de réglement des accidents est de 5000 DH avec une probabilité de 0.25 et de 15000 DH avec une probabilité de 0.1, de 25000 DH avec une probabilité de 0.05. Un assuré déclare au plus un sinistre de ce type dans l'année.
1) Pour espérer une bénéfice moyen de 500 DH par assuré, quel doit être le montant de la cotisation.
2) Quelle est la probabilité pour que le coût de règlement total de deux assurés pris au hasard n'excède pas le montant encaissé de leurs cotisations?

Exercice 4 : Un conseiller financier d'une banque reçoit 6 clients par jour. A chaque visite d'un client il a 20% de chance que le client lui achète un produit financier. Soit X la variable aléatoire est égale au «nombre de produits financiers vendu».
1) Expliquer clairement de quelle loi s'agit-il pour X ?
2) Quelle est la probabilité qu'exactement deux produits soient vendus?
3) Aucun produit ne soit vendu.
4) Au moins 1 produit soit vendu.

Exercise 5: On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0.25.
1) On lance 10 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 5 fois pile?
2) On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. Combien faut-il espérer de lancers ?

Exercice 6 : Le responsable d'une agence de location de voitures a fait un suivi sur les pannes de ses véhicules sur une période d'un an. Ceci a permis d'établir que le taux moyen de pannes a été de 2 pannes/mois.
1) En admettant que le nombre de pannes en un mois obéit à une loi de Poisson, quelle est l'expression qui permettrait de calculer la probabilité d'observer k pannes de voitures par mois.

2) Quelle est la probabilité d'observer au plus 2 pannes par mois?

3) Quelle est la probabilité d'observer plus de 3 pannes par mois? (3 inclus)

4) Quelle est la probabilité d'observer 5 pannes sachant qu'on a observé au moins 3 pannes.

Exercice 7: Compte tenu des réductions budgétaires, un hôpital souhaite changer l'organisation de certains services.

1) Le service des urgences reçoit en moyenne une personne toutes les 2 heures. On suppose que le nombre de personnes reçues suit une loi de Poisson.

a) Déterminer le nombre moyen de patients admis par jour.

b) Calculer la probabilité de recevoir au moins 20 personnes un jour donnée.

2) Dans 10% des cas, les patients doivent être hospitalisés. Un jour donné il y eut 30 entrées aux urgences.

a) Calculer le nombre moyen des patients qui ont été hospitalisé.

b) Soit Y le nombre de patients hospitalisés ce jour là. Quelle est la loi de Y? Par quelle loi peut-on l'approcher?

c) Quelle est la probabilité que 10 patients au plus soient hospitalisés.

3) Au service des soins intensifs, le nombre journalier de patients suit une loi de Poisson. On estime que la probabilité qu'il n'y ait aucun patient est égale à $6,738.10^{-3}$. La direction décide de limiter à 10, le nombre de lits dans ce service. Que pensez vous de cette décision? **Exercice 8:** Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer la constante k pour que f soit une densité de probabilité.

2) Déterminer la fonction de répartition associée à la densité f.

Exercice 9: Soit X une v.a qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. En utilisant les tables statistiques

1) Calculer les probabilités suivantes: $P(X \geq 1.45)$, $P(X \leq -0.75)$ et $P(-20.5 \leq X \leq 2)$.

2) Calculer les quantiles d'ordre 0.025 et 0.975.

3) On suppose maintenant que X suit la loi normale $\mathcal{N}(4,7)$. Déterminez $P(2.9 \leq X \leq 5.2)$ et le quantile d'ordre 0.95 de X.

Exercice 10: En utilisant les tables statistiques répondez aux questions suivantes:

1) Soit X une v.a qui suit la loi chi deux à 10 ddl. Quelles sont les quantiles d'ordre 1%, 5%, 10% et 99% de X?

2) Soit Y une v.a qui suit la loi Student à 6 ddl. Calculer y tel que la probabilité $P(|X| \leq y) = \alpha$ dans le cas où $\alpha = 0.90$, 0.95 et 0.99.

Exercice 11 : Un QCM est constitués de 10 questions chacune comprend 4 choix dont un seul est juste. Le barème choisi est $+1.5$ pour une bonne réponse et -0.5 pour une mauvaise et 0 point pour une non réponse. Un étudiant répond au hasard à toutes les questions Quelle est la loi de probabilité de sa note ? Qu'est ce qu'il doit espérer comme note?