Série d'Exercices n°3

Exercice 1. Considérons la distribution de probabilité de la variable aléatoire (X, Y) définie par le tableau suivant :

	Y	
X	1	3
0	0.30	0.20
1	0.24	0.10
2	0.06	0.10

1) Déterminez les moyennes et les variances des distributions marginales.
2) Les variables X et Y sont-elles indépendantes? Justifiez!
3) Déterminez la moyenne de la distribution conditionnelle de X sachant $Y = 3$.
4) Calculez le coefficient de corrélation entre X et Y.

Exercice 2. Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ une variable aléatoire bidimensionnelle dont la moyenne et la matrice variance-covariance sont, respectivement :

$$\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma_X} = \begin{pmatrix} 25 & -1/2 \\ -1/2 & 9 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminez $\mathrm{E}[4X_1 - 3X_2]$
2) Déterminez $\mathrm{Var}(4X_1 - 3X_2)$

Exercice 3. Considérons le vecteur aléatoire (X, Y) de densité jointe définie par :

$$\begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

1) Déterminez la densité marginale de X et déduisez $\mathrm{E}[X]$.
2) Déterminez la densité conditionnelle de X sachant que $Y = 1/2$.

Exercice 4. Soit X le nombre de voitures passant entre 16 h et 17 h en un point donné d'une autoroute. Grâce à des observations étalées sur plusieurs mois, on a pu déterminer que X est de moyenne 4 000 et de variance 100 000. Le ministre des travaux publics décide de construire une nouvelle autoroute si le nombre de voitures, mesuré un jour donné, est compris entre 3500 et 4500. Donnez une borne inférieure pour la probabilité de construire une nouvelle autoroute.

Exercice 5. Un appareil contient un composant essentiel dont l'espérance de la durée de vie est $\mu = 10$ h, avec un écart type $\sigma = 2$ h. L'appareil doit fonctionner pendant 2200 heures.
Combien de composant faut il avoir en réserve pour garantir une fiabilité de 97%?

Exercice 6. A la veille d'un long week-end, 200 personnes font la file aux guichets d'une banque pour s'approvisionner en liquide. L'expérience a montré que les sommes retirées sont indépendantes et identiquement distribuées, de moyenne 500 DH et d'écart type 100 DH. L'agence dispose de 120 000 DH. Quelle est la probabilité que cette somme ne suffise pas à satisfaire tous les clients ?

Exercice 7. Le contenu en nicotine d'une cigarette d'une marque bien connue est une variable aléatoire de moyenne $0,8$ mg et d'écart type $0,1$ mg. Un certain fumeur de cette marque consomme 5 paquets par semaine (1 paquet = 20 cigarettes). Quelle est la probabilité qu'il absorbe en une semaine moins de 80 mg de nicotine?

Exercice 8. Un hôtel *Ibis* a 120 chambres. Pendant le printemps, le taux de remplissage de l'hôtel est d'environ 75%. Utilisez l'approximation normale de la loi binomiale pour répondre aux questions suivantes:
1) Quelle est la probabilité qu'au moins la moitié des chambres soient occupées un jour donné?
2) quelle est la probabilité qu'au moins 100 chambres soient occupées un jour donné?
3) quelle est la probabilité qu'au plus 80 chambres soient occupées un jour donné?

Exercice 9. Une compagnie d'assurance constate que chaque année 0.4% de ces assurés meurent à la suite d'une maladie. Posons X le nombre de sinistre à payer au cours d'une année où la compagnie gère 100 000 dossiers.
1) Déterminez la loi exacte de la variable aléatoire X et déduisez la probabilité pour que la compagnie n'ait pas de sinistre à payer.
2) En utilisant une approximation adéquate, déterminez la probabilité que la compagnie payeras plus de 440 risques assurés.

Exercice 10. Une série de fabrications ne peut pas être expédiée si un échantillon de 100 pièces contient au moins 5% de pièces défectueuses. Si une série de fabrication a une proportion de pièces défectueuses égale à $p = 0.10$, quelle est la probabilité pour que la proportion $\bar{p}$ des pièces défectueuses dans l'échantillon soit supérieure ou égale à 5%?

Exercice 11. Des briques sont fabriquées selon une technique qui assure un poids normalement distribué d'espérance 1.6 kg et d'écart type de 30 g. On prélève un échantillon aléatoire simple avec remise, de moyenne $\bar{X}$.
1) Quel est l'écart type de $\bar{X}$, lorsque sa taille vaut 50 et lorsqu'elle vaut 100?
2) Quelle est la loi de $\bar{X}$?
3) À partir de quelle taille de l'échantillon, on aura plus de 95% de chance, pour que la moyenne $\bar{X}$ s'écartera-t-elle de 1.6 kg de moins de 20 g.